Mathématiques discrètes
Chapitre 3 : Logique, prédicats

1. Propositions, Connecteurs

Propositions

Définition : On appelle *proposition* un énoncé ayant un sens et dont on peut dire s'il est vrai ou faux.

Exemples 1

"3 est un entier pair"

"7 est un nombre premier"

"Toulouse est une ville d'Espagne"

Attention :
"$n \in \mathbf{N}$ et n est pair" n'est pas une proposition, parce que cet énoncé n'est pas vrai ou faux : sa valeur de vérité dépend de n.
"la présente affirmation est fausse" n'est pas une proposition (il y a des règles précises de construction des propositions, nous ne rentrons pas dans ces détails ici).

Usuellement, on désigne les propositions par des lettres : $A, B, C \ldots, p, q, r, \ldots$ et on leur attribue une *valeur de vérité* : vrai (V,1) ou faux (F,0).

Connecteurs

En calcul arithmétique, les nombres s'ajoutent, se retranchent, se multiplient,... de façon analogue, le *calcul propositionnel* permet de combiner les propositions entre elles au moyen de *connecteurs logiques*, ce procédé permet de construire d'autres propositions.
Si p est une proposition (un énoncé sans ambiguïté) on lui associe sa *table de vérité* (toutes les éventualités).

p
0
1

1) Négation
La *négation* de p est la proposition qui est fausse lorsque p est vraie, et vraie lorsque p est fausse. On la note non(p), ou $\neg p$ ou $\overline{p}$.

p	$\neg p$
0	1
1	0

2) Conjonction
Soient p et q deux propositions. Leur *conjonction* est vraie lorsque toutes les deux sont vraies, on l'obtient en liant p et q par le mot "et" : p et q, noté aussi $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemples 2

- *p : "3 est un entier pair" ;* *q : "4 est un entier impair"*
- *p : "6 est un multiple de 2" ;* *q : "6 est un multiple de 3"*

3) Disjonction

Soient p et q deux propositions. Leur *disjonction* est vraie lorsque l'une au moins est vraie, on l'obtient en liant p et q par le mot "ou" : p ou q, noté aussi $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemples 3

- *p : "9 est un multiple de 2" ;* *q : "9 est un multiple de 3"*
- *p : "12 est un multiple de 5" ;* *q : "12 est un multiple de 7"*

Remarque : dans le langage courant, le ou français a une connotation d'exclusivité (les deux propositions ne peuvent être vraies simultanément, par exemple : "fromage ou dessert" ; "une porte est ouverte ou fermée"), alors que le ou logique admet cette éventualité. Pour éviter cette confusion, on définit le *ou exclusif*, noté $\veebar$.

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exercice de cours 1.

Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?

On commencera par les écrire à l'aide de connecteurs logiques et de propositions plus simples.

P="il n'est pas vrai que 23 n'est pas divisible par 7"

Q="π vaut 4 et la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés"

R="π vaut 4 ou la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés"

Exemple 4

Dressons la table de vérité de la proposition

$$A = (p \wedge q) \vee \neg p.$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	A
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Exercice de cours 2. Dresser la table de vérité de la proposition suivante :

$$B = (\neg p \vee \neg q) \wedge p.$$

4) Implication
Soient p et q deux propositions. La proposition "p *implique* q", appelée aussi "p entraîne q", "si p alors q", notée $p \to q$ est définie par le tableau de vérité suivant :

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exemples 5

- *p : "3 est plus grand que 4" ;* *q : "6 est plus grand que 7"*
- *p : "Noël est en mars" ;* *q : "il neige tous les jours de juillet"*

Exercice de cours 3. On considère la proposition suivante, dont on considère qu'elle est vraie :
P="Si j'ai 1000 euros dans la poche, alors je peux acheter un café".
a) écrire P à l'aide de 2 propositions plus simples et du connecteur logique $\to$.
b) que peut-on dire si j'ai 1000 euros dans la poche ?
c) que peut-on dire si je n'ai pas 1000 euros dans la poche ?
d) que peut-on dire si je peux m'acheter un café ?
e) que peut-on dire si je ne peux pas m'acheter un café ?

5) Equivalence
Soient p et q deux propositions. La proposition "p *est équivalent à* q" est notée $p \leftrightarrow q$. C'est la conjonction de $p \to q$ et $q \to p$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exercice de cours 4. Donner les tables de vérité des propositions suivantes :

$$C = (p \to q) \wedge q; \qquad D = q \leftrightarrow \neg p.$$

Exercice de cours 5. Soient les propositions :
p="Jean est fort en mathématiques",
q="Jean est fort en informatique", r="Jean est fort en anglais".
Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique à l'aide des propositions p, q et r :
P_1="Jean est fort en mathématiques mais faible en anglais",
P_2="Jean n'est ni fort en mathématiques ni fort en informatique",
P_3="Jean est fort en informatique ou il est à la fois faible en anglais et fort en mathématiques",

P_4="Jean est fort en informatique s'il est fort en mathématiques",
P_5="Jean ne peut être fort en informatique sans être fort en anglais".

Définition : On appelle *tautologie* une proposition toujours vraie, notée $\top$, et on appelle *contradiction* (ou antilogie) une proposition toujours fausse, notée $\perp$.

Définition : On dit que q est une *conséquence logique* de p si $p \rightarrow q$ est une tautologie. On écrit alors $p \Rightarrow q$.
On dit que p et q sont *logiquement équivalentes* si $p \leftrightarrow q$ est une tautologie (autrement dit, p et q ont la même table de vérité). On note alors $p \Leftrightarrow q$ ou $p \equiv q$.

Propriétés :

- double négation : $\neg(\neg p) \equiv p$,
- idempotence : $p \wedge p \equiv p \quad ; \quad p \vee p \equiv p$,
- commutativité : $p \wedge q \equiv q \wedge p \quad ; \quad p \vee q \equiv q \vee p \quad ; \quad p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$
  mais attention : $p \rightarrow q \not\equiv q \rightarrow p$.
- associativité : $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad ; \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.
- distributivité : $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad ; \quad (p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
- absorption : $p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad ; \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$.
- lois de Morgan : $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \quad ; \quad \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.
- implication : $p \rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$.
- exportabilité : $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$.
- contraposition : $p \rightarrow q \equiv \overline{q} \rightarrow \overline{p}$.

Exemples 6

Vérifions les propriétés suivantes : idempotence, distributivité.

Exercice de cours 6.
Vérifier en dressant leur table de vérité les propriétés suivantes :
- absorption

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

- contraposition

$$p \rightarrow q \equiv \overline{q} \rightarrow \overline{p}$$

Exercice de cours 7.
Vérifier que l'on a

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

mais que

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \not\equiv p \rightarrow (q \rightarrow r).$$

---

2. Formes propositionnelles

A partir de l'ensemble des nombres réels, on ajoute des variables et on combine le tout pour former des polynômes. De la même façon, à partir des propositions on ajoute des variables $p, q, r \ldots$ appelées *variables propositionnelles*. En les combinant à l'aide de connecteurs logiques on obtient les *formes propositionnelles*, ou *formules*. C'est ce que nous avons déjà commencé à faire précédemment.

Définition : Soit P_A un ensemble de lettres, appelées *variables propositionnelles*. L'ensemble des *formes propositionnelles* (ou *formules*) sur P_A se définit comme suit :

- une proposition est une forme propositionnelle,
- si p est une variable propositionnelle, alors p écrit tout seul est une forme propositionnelle,
- si P est une forme propositionnelle, alors $\neg P$ l'est aussi,
- si P et Q sont deux formes propositionnelles, alors $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$ et $P \leftrightarrow Q$ le sont aussi.

Dans une forme propositionnelle, quand on remplace les variables par des propositions, on obtient une proposition à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité. On peut également dresser la table de vérité d'une formule, en fonction des valeurs de vérité des variables qui la composent.

Exemples 7

- *$f(p,q) = p \wedge q$,*
- *$g(p,q) = p \vee q$,*
- *$P(p) = \overline{p} \vee p$, c'est une tautologie,*
- *$Q(p) = \overline{p} \wedge p$, c'est une contradiction.*

Il y a 16 formes propositionnelles fonctions de 2 variables :

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

on reconnaît :

$f_1 = \bot$	$f_2 = p \downarrow q$	f_3	f_4	$f_5 = p \wedge q$	f_6	f_7	$f_8 = p \leftrightarrow q$
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	$f_{13} = p \rightarrow q$	f_{14}	$f_{15} = p \vee q$	$f_{16} = \top$

La forme propositionnelle f_2 est notée $\downarrow$ "pierce".
On peut exprimer $p \downarrow q$ en français en disant "ni p, ni q".

Définition : Une *fonction d'interprétation* (ou *interprétation*) est une application

$$\begin{array}{rccc} I: & P_A & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & p & \longmapsto & I(p) \end{array}$$

cette application attribue à chaque variable propositionnelle une valeur logique, et permet donc d'évaluer la valeur de vérité d'une forme propositionnelle sur P_A. Une forme propositionnelle possédant n variables admet 2^n interprétations différentes.

Définition : Soit P une forme propositionnelle. On appelle *modèle* de P toute interprétation qui rend P vraie.

Exemples 8

- *$P = \overline{p} \wedge q$ alors I définie par $I(p) = 0$ et $I(q) = 1$ est un modèle de P*
- *$Q = \overline{p} \vee (q \wedge r)$: alors I définie par $I(p) = I(q) = I(r) = 0$ est un modèle de Q*
- *toute interprétation est modèle d'une tautologie, et une contradiction n'admet pas de modèle.*

Exercice de cours 8. Déterminer (si possible) un modèle des formes propositionnelles suivantes ;

$$A = (p \wedge \neg q) \vee (q \rightarrow p); \qquad B = (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \qquad C = ((p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow p)) \rightarrow \overline{p}.$$

Définition : Soit $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ un ensemble de formules, et P une autre formule (n'appartenant pas nécessairement à $\mathcal{F}$). On dit que P est une *conséquence logique* de $\mathcal{F}$, et on écrit $\mathcal{F} \Rightarrow P$, si tout modèle commun aux éléments de $\mathcal{F}$ est un modèle de P, ce qui revient à dire que $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow P$ est une tautologie.
Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés les *prémisses*.

Exemple 9

- *Transitivité (règle du syllogisme) :* $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \Rightarrow p \rightarrow r$.

Exercice de cours 9. Vérifier les conséquences logiques suivantes :
- Modus-Ponens : $\{p, p \rightarrow q\} \Rightarrow q$.
- Modus-Tollens : $\{\overline{q}, p \rightarrow q\} \Rightarrow \overline{p}$.
- $\{\overline{P}\} \Rightarrow P \rightarrow Q$ où P et Q sont deux formes propositionnelles.

Définition : Soit $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ un ensemble de formules. On dit que $\mathcal{F}$ est *cohérent*, ou que les formules de $\mathcal{F}$ sont *compatibles* si elles ont au moins un modèle en commun, ce qui revient à dire que $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ admet au moins un modèle.
Dans le cas contraire, on dit que les formules sont *incompatibles*, ou que *l'ensemble $\mathcal{F}$ est incohérent (inconsistant).*

Exemples 10

- $\{p, \overline{p} \vee q\}$ *sont compatibles*
- $\{p \wedge q, \overline{p} \vee \overline{q}\}$ *sont incompatibles*

Exercice de cours 10. Les formules suivantes sont-elles compatibles ?

$$\{\ p \rightarrow q, q \rightarrow p\},$$

$$\{\ p \rightarrow q, q \rightarrow \neg p\}.$$

Théorème : Soit $\mathcal{F} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ un ensemble de formules. Une formule P est une conséquence logique de $\mathcal{F}$ si et seulement si la contradiction $\perp$ est une conséquence de $\mathcal{F} \cup \{\overline{P}\} = \{P_1, \ldots, P_n, \overline{P}\}$. Ce que l'on écrit :

$$\mathcal{F} \Rightarrow P \text{ est équivalent à } \mathcal{F} \cup \{\overline{P}\} \Rightarrow \perp.$$

Ce qui revient à dire que l'ensemble est $\{P_1, \ldots, P_n, \overline{P}\}$ incohérent.

---

3. Schémas de raisonnement

Une des questions qui se pose est de déterminer si une formule est une conséquence logique d'un ensemble de formules.

3.1 Exemple

supposons que nous ayons validé les hypothèses suivantes :

*les gens qui ont de la rougeole doivent prendre le médicament X

*les gens qui ont de la fièvre et des points rouges au fond de la gorge ont la rougeole

*ceux pour qui la température dépasse 38° sont considérés comme ayant la fièvre.

Jean a des points rouges au fond de la gorge et a une température de 39°5
La question est : ***Est-ce-que Jean doit prendre le médicament X ?***.
L'assertion "*Jean doit prendre le médicament X*" est considérée comme une formule à démontrer.
On pose :
r :" avoir la rougeole"
x :" doit prendre le médicament X"
f : " avoir la fièvre"
g : " avoir des points rouges au fond de la gorge"
t :" avoir une température supérieure à 38°"

a)Démonstration utilisant la règle du Modus-Ponens $(p \wedge (p \longrightarrow q) \Longrightarrow q)$**.**
Les hypothèses sont : $r \to x$, $(f \wedge g) \to r$, $t \to f$, g et t.
Question : a-t-on x ? Ce qui revient à démontrer la conséquence logique

$$\{r \to x, (f \wedge g) \to r, , t \to f, g, t\} \Rightarrow x$$

t	(prémisse)
$t \longrightarrow f$	(prémisse)
f	(Modus-Ponens)
g	(prémisse)
$f \wedge g$	(introduction de $\wedge$)
$(f \wedge g) \longrightarrow r$	(prémisse)
r	(Modus-Ponens)
$r \longrightarrow x$	(prémisse)
x	(Modus-Ponens)

b)Démonstration utilisant la régle du Modus-Tollens $(\overline{q} \wedge (p \longrightarrow q) \Longrightarrow \overline{p})$
La question est toujours : a-t-on x ? Ce qui revient (d'après le théorème ci-dessus) à démontrer la conséquence logique :

$$\{r \to x, (f \wedge g) \to r, , t \to f, g, t, \overline{x}\} \Rightarrow \perp$$

Ce qui est équivalent à dire que l'ensemble $\{r \to x, (f \wedge g) \to r, , t \to f, g, t, \overline{x}\}$ est incohérent.
Cette fois on démarre de la négation de la conclusion recherchée (on suppose $\overline{x}$ vraie ce qui est le raisonnement par l'Absurde).

$\overline{x}$	(prémisse)
$r \longrightarrow x$	(prémisse)
$\overline{r}$	(Modus-Tollens)
$(f \wedge g) \longrightarrow r$	(prémisse)
$\overline{f \wedge g}$	(Modus-Tollens)
$\overline{f} \vee \overline{g}$	(Morgan)
g	(prémisse)
$\overline{f}$	(régle :$(p \vee q) \wedge \overline{q} \Longrightarrow p$)
$t \longrightarrow f$	(prémisse)
$\overline{t}$	(Modus-Tollens)
t	(prémisse)
$\perp$	(contradiction)

où $\perp$ est un symbole désignant une contradiction.

3.2 Méthode de résolution de Robinson

Théorème : (*règle de résolution*)
Soient P , Q et X trois formes propositionnelles quelconques. Alors

$$\{X \vee P, \overline{X} \vee Q\} \Longrightarrow P \vee Q$$

Démonstration : On sait que $(X \vee P) \Leftrightarrow \left(\overline{P} \longrightarrow X\right)$ et que $\left(\overline{X} \vee Q\right) \Leftrightarrow (X \longrightarrow Q)$. Donc si $X \vee P$ et $\overline{X} \vee Q$ alors par transitivité (syllogisme)

$$\left(\overline{P} \longrightarrow Q\right) \text{ qui est équivalent à } P \vee Q.$$

Définition : On appelle littéral, toute forme propositionnelle composée d'une seule variable propositionnelle (atome) ou de sa négation.
Exemple 11

Les formules p et $\overline{p}$ avec $p \in P_A$ sont des littéraux.

Définition : On appelle clause, toute formule disjonction de littéraux.
Exemple 12

Les formules $p \vee q \vee r$, $p \vee \overline{q} \vee r$, q et $\overline{r}$ sont des clauses.

Définition : (*résolvante de 2 clauses*) : Soient C_1 et C_2 deux clauses, telles que le littéral t figure dans l'expression de l'une et le littéral $\overline{t}$ figure dans l'expression de l'autre (on écrira par exemple $t \in C_1$ et $\overline{t} \in C_2$). On appelle résolvante de C_1 et C_2, la clause notée $Res\,(C_1, C_2)$ obtenue en prenant la disjonction des littéraux de C_1 et de C_2 moins les littéraux t et $\overline{t}$.
Exemple 13

Si $C_1 = \overline{p} \vee q \vee r$ et $C_2 = p \vee q \vee s$, alors $Res\,(C_1, C_2) = q \vee r \vee s$

Remarque :

1. D'après la règle de résolution on a :

   $$\{C_1, C_2\} \Longrightarrow Res\,(C_1, C_2)\,.$$

   Donc la résolvante de deux clauses est une conséquence logique de la conjonction de ces deux clauses.
2. $\{C_1, C_2\} \underbrace{\equiv}_{\text{équivalent}} \{C_1, C_2, Res\,(C_1, C_2)\}$ car $C_1 \wedge C_2 \equiv C_1 \wedge C_2 \wedge Res\,(C_1, C_2)$

Application : On reconsidère l'exemple précèdent :
Il s'agit de montrer que l'ensemble $\{r \to x, (f \wedge g) \to r, , t \to f, g, t, \overline{x}\}$ est incohérent. Remarquons que $\{r \to x, (f \wedge g) \to r, , t \to f, g, t, \overline{x}\} = \left\{\overline{r} \vee x, \overline{f} \vee \overline{g} \vee r, \overline{t} \vee f, g, t, \overline{x}\right\}$. Ce qui correspond à la mise des propositions sous forme clausale.

Ensemble de départ	$\left\{\overline{\mathbf{r}} \vee \mathbf{x}, \overline{f} \vee \overline{g} \vee r, \overline{t} \vee f, g, t, \overline{\mathbf{x}}\right\}$
1er pas	$\left\{\overline{r} \vee x, \overline{\mathbf{f}} \vee \overline{\mathbf{g}} \vee \mathbf{r}, \overline{t} \vee f, g, t, \overline{x}, \overline{\mathbf{r}}\right\}$
2 ^{ème} pas	$\left\{\overline{r} \vee x, \overline{f} \vee \overline{g} \vee r, \overline{t} \vee f, \mathbf{g}, t, \overline{x}, \overline{r}, \overline{\mathbf{f}} \vee \overline{\mathbf{g}}\right\}$
3 ^{ème} pas	$\left\{\overline{r} \vee x, \overline{f} \vee \overline{g} \vee r, \overline{\mathbf{t}} \vee \mathbf{f}, g, t, \overline{x}, \overline{r}, \overline{f} \vee \overline{g}, \overline{\mathbf{f}}\right\}$
4 ^{ème} pas	$\left\{\overline{r} \vee x, \overline{f} \vee \overline{g} \vee r, \overline{t} \vee f, g, \mathbf{t}, \overline{x}, \overline{r}, \overline{f} \vee \overline{g}, \overline{f}, \overline{\mathbf{t}}\right\}$

On aboutit donc à une contradiction $\perp$. Donc l'ensemble $\{r \to x, (f \wedge g) \to r, , t \to f, g, t, \overline{x}\}$ est incohérent.
Pour finir ce paragraphe, il reste à signaler que toute forme propositionnelle peut s'écrire sous la forme de conjonction de clauses. Ce résultat découle de la distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$ et du fait que le système $\{\neg, \vee, \wedge\}$ est un système primitif (complet).

Exercice de cours 11. Démontrer la déduction suivante :
Si Jean n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit c'est que Pierre est le meurtrier ou Jean un menteur. Si Pierre n'est pas le meurtrier, alors Jean n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit et le crime a eu lieu après minuit. Si le crime a eu lieu après minuit, alors Pierre est le meurtrier ou Jean n'est pas un menteur. ***Donc Pierre est le meurtrier***.

4. Prédicats, quantificateurs

Prédicats

$$\left.\begin{array}{l} P_1 : \text{“2 est un entier pair“} \\ P_2 : \text{“3 est un entier pair“} \end{array}\right\} \text{sont des propositions.}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(n) : \text{“}n\text{ est un entier impair“} \\ Q(x) : \text{“}x\text{ est un réel positif“} \\ R(m,n) : \text{“}n+m\text{ est pair“} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{sont des énoncés qui dépendent de quantités } : n, x, (n,m), \\ \text{donc ce ne sont pas des propositions.} \end{array}$$

Mais si on fixe la variable n, $P(n)$ devient une proposition ; si on fixe la variable x, $Q(x)$ devient une proposition.

Définitions :
Un *prédicat* est un énoncé dépendant d'une ou plusieurs variables et dont on pourra dire s'il est vrai ou faux suivant le choix de la variable (ou des variables). L'ensemble dans lequel on choisit la variable est l'*univers*. Le nombre de variables intervenant dans le prédicat est le *poids* du prédicat.

Exemples 14

- *$P(x)$: "x est un entier pair"*

  univers de P : $\mathbf{N}$; poids de P : 1
- *$Q(T)$: "le triangle T est isocèle"*

  univers de Q : l'ensemble des triangles du plan ; poids de Q : 1
- *$R(m,n)$: "le couple d'entiers relatifs (n,m) est tel que $n+m=15$"*

  univers de R : $\mathbf{Z}$; poids de R : 2

Remarque : dans un prédicat de poids p, si l'on assigne une valeur à l'une des variables on obtient un prédicat de poids $p-1$.

Exemple 15

$P(m,n)$: "le couple d'entiers (n,m) est tel que $n+m>12$" : P est un prédicat de poids 2

$Q(m)=P(3,m)$: "l'entier m est tel que $3+m>12$" : Q est un prédicat de poids 1.

Si l'on remplace m par 2 on obtient la proposition $Q(2)$ dont la valeur de vérité est ...

Convention : une proposition est un prédicat de poids 0.

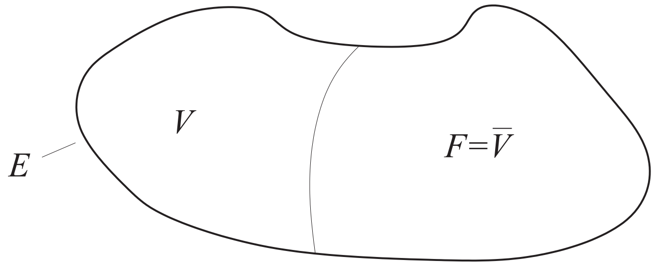
Quantificateurs

Soit P un prédicat de poids 1 sur l'univers E. P associe à $x \in E$ la proposition $P(x)$.
On pose :

$$V = \{x \in E \mid P(x) \text{ est vraie}\},$$
$$F = \{x \in E \mid P(x) \text{ est fausse}\}.$$

Si $V = E$, cela signifie que pour tout $x \in E, P(x)$ est vraie. On notera alors

$$\forall x \in E, P(x).$$



Si $V = \emptyset$, cela signifie que pour tout $x \in E, P(x)$ est fausse. Cela se note

$$\forall x \in E, \neg P(x).$$

Si $V \neq \emptyset$, cela signifie qu'il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie. On notera alors

$$\exists x \in E, P(x).$$

Exemples 16

A partir du prédicat $P(n)$: "l'entier naturel n est pair", on construit

la proposition : $\forall n \in \mathbf{N},\ P(n)$ (qui a la valeur logique ...), et

la proposition : $\exists n \in \mathbf{N},\ P(n)$ (qui a la valeur logique ...).

On peut généraliser au cas des prédicats de poids supérieur, et utiliser des quantificateurs différents pour chaque variable.

Attention : lorsque deux quantificateurs sont différents, l'ordre dans lequel ils sont a une importance.

Exemple 17

Soit $E = \mathbf{R}$, et le prédicat de poids 2 suivant $P(x, y) : x \geq y$

on peut construire les propositions suivantes (dont on indiquera la valeur logique) :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ x \geq y,$$
$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x \geq y,$$
$$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ x \geq y,$$
$$\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x \geq y.$$

Prédicats et opérateurs logiques

Exemple 18

Considérons les deux prédicats suivants :

$P(n)$: "l'entier naturel n est impair" ; $Q(m)$: "l'entier naturel m est un nombre premier"

On peut définir des prédicats à l'aide des opérateurs logiques $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \ldots$, par exemple :

$$P \wedge Q(n) = P(n) \wedge Q(n) : \text{“}n \text{ est un entier impair et premier“}.$$

Attention : *ne pas confondre avec $P(n) \wedge Q(m)$: "n est impair et m est premier" qui est un prédicat de poids 2*

Propriétés : soient P et Q deux prédicats de même univers E.

- $(\forall x \in E,\ P(x) \wedge Q(x))$ et $(\forall x \in E,\ P(x)) \wedge (\forall x \in E,\ Q(x))$ ont les mêmes valeurs de vérité.
- $(\exists x \in E,\ P(x) \wedge Q(x))$ entraîne $(\exists x \in E,\ P(x)) \wedge (\exists x \in E,\ Q(x))$ mais la réciproque n'est pas vraie.
- $(\exists x \in E,\ P(x) \vee Q(x))$ et $(\exists x \in E,\ P(x)) \vee (\exists x \in E,\ Q(x))$ ont les mêmes valeurs de vérité.
- $(\forall x \in E,\ P(x)) \vee (\forall x \in E,\ Q(x))$ entraîne $(\forall x \in E,\ P(x) \vee Q(x))$ mais la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 19

contre-exemple pour la dernière :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (x \geq 0 \vee x \leq 0),$$

$$(\forall x \in \mathbf{R},\ x \geq 0) \vee (\forall x \in \mathbf{R},\ x \leq 0).$$

Exercice de cours 12. Donner un contre-exemple à la réciproque de la deuxième.

Propriétés : soit P un prédicat d'univers E.

$$\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad \exists x \in E,\ (\neg P(x)),$$

et

$$\neg(\exists x \in E,\ P(x)) \quad \equiv \quad \forall x \in E,\ (\neg P(x)).$$

Exemples 20

- *A : "tout entier naturel est pair"*

non A :

- *B : "il existe une montagne sur la Terre qui mesure plus de 10km de haut"*

non B :

Exercice de cours 13. Donner la valeur de vérité et écrire la négation des propositions suivantes :

$$\exists x \in \mathbf{R}, |x| < 0 \qquad ; \qquad \forall y \in \mathbf{R}, y^2 \geq 0$$

$$\exists z \in \mathbf{R}, z^2 - 4 < 0 \qquad ; \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x^2 + y < 0$$

---

5. Principe d'induction, démonstration par récurrence

Théorème : principe d'induction faible (récurrence)

Soit $P(n)$ un prédicat d'univers $\mathbf{N}$, c'est-à-dire $n \in \mathbf{N}$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} P(0) \text{ est vraie} \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbf{N}\ P(n) \rightarrow P(n+1) \end{cases}$$

alors $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$ est vraie.

Variante : on peut démarrer une récurrence à partir d'un $n_0 \in \mathbf{N}$, on montre alors que $\forall n \geq n_0, P(n)$.

Applications : à l'aide de ce principe on effectue des démonstrations par récurrence.

Exemple 21

Considérons le prédicat suivant

$$P(n) : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$n = 1$ *:*

supposons

conclusion :

Attention : ne pas oublier de vérifier $P(0)$ ou $P(n_0)$.

Exemple 22

Considérons le prédicat suivant

Si E *est un ensemble de cardinal* n*, alors* $Card\mathcal{P}(E) = 2^n$.

$n = 0$ *:*

supposons

conclusion :

Récursivité

Dans l'ensemble $\mathbf{N}$ on définit l'application "successeur" par

$$\begin{array}{rccc} s : & \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ & n & \longmapsto & s(n) = n + 1 \end{array}$$

Le principe d'induction exprime le fait que si une partie A de $\mathbf{N}$ vérifie

$$\begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in A, s(n) \in A \end{cases}$$

alors $A = \mathbf{N}$.

Une généralisation de ce principe est la définition d'ensembles de façon *récursive* : illustrons d'abord ceci par un exemple.

Exemple 23

On définit un sous-ensemble A *de* $\mathbf{N}$ *en déclarant :*

$$\begin{cases} (i)\ 1 \in A \\ \text{et} \\ (ii)\ \text{si } a \in A, \text{ alors } 7a \in A \end{cases}$$

En partant de (i) et en appliquant de façon répétée la règle (ii), on voit que A *est formé des puissances de 7.*

Définition : D'une façon générale, pour définir un sous-ensemble A de l'ensemble E de façon récursive, on se donne

- une partie B de E appelée la *base*,
- des fonctions $f : E^n \to E$ appelées *règles d'induction*,

et on déclare que A est la plus petite partie de E qui vérifie

- $B \subset A$,
- $f(A^n) \subset A$ pour chaque règle d'induction.